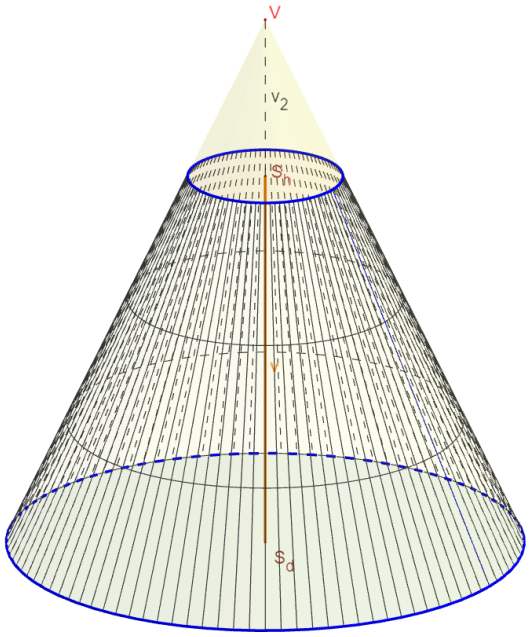
Povrch a objem zrezaného kužeľa

Ak je daný jeden kužeľ a zoberieme rovinu rovnobežnú s postavou, prechádzajúcu kužeľom, potom táto rovina rozdelí teleso na dve telesá. Jedno teleso je kužeľ (pôvodný zmenšený – stredom rovnoľahlosti je vrchol, koeficient rovnoľahlosti dostaneme ako podiel výšok: výška zmenšeného delená výškou pôvodného).
Druhé teleso je zrezaný kužeľ.



podstavy (dolná a horná) – dva rovnobežné, podobné krivkami ohraničené rovinné útvary
výška telesa: v – vzdialenosť podstáv
strana zrezaného kužeľa – spojnica hraničných bodov dolnej a hornej podstavy
plášť zrezaného kužeľa – súhrn strán

kolmý zrezaný kužeľ – ak pôvodný kužeľ bol kolmý, aj zrezaný bude: spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou telesa)
zrezaný rotačný kužeľ – ak pôvodný kužeľ bol rotačný, aj zrezaný bude: podstavy sú kruhy; spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou telesa); strany sú zhodné

aj zrezaný rotačný kužeľ je rotačné teleso – vznikne rotáciou pravouhlého lichobežníka okolo kolmého ramena
podstavy sú kruhy
osový rez tohto telesa je rovnoramenný lichobežník
rozvinutý plášť je výsek z medzikružia

všeobecný zrezaný kužeľ:

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

$$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

zrezaný rotačný kužeľ:

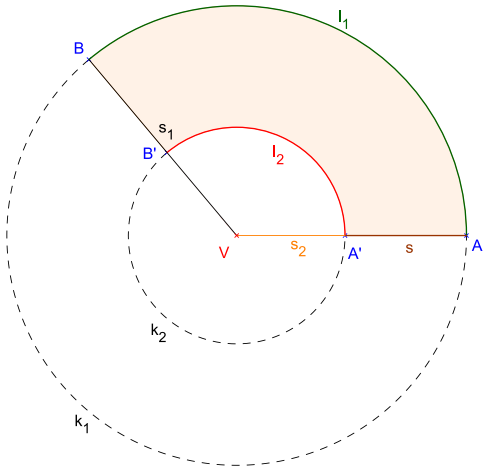
$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$$

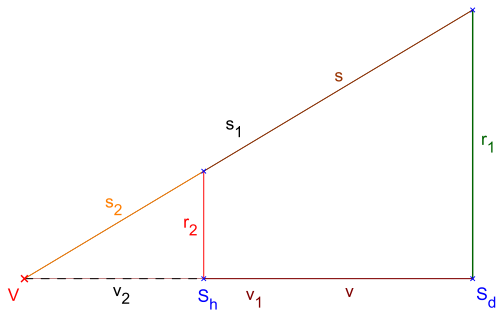
$$V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

Dô.

vo všeobecnom vzorci nahradíme obsahy podstáv s obsahmi kruhov

$S_1 = \pi r_1^2$ a $S_2 = \pi r_2^2$





plášť dostaneme ako rozdiel plášťov rotačných kužeľov

$S_{pl} = S_{pl1} - S_{pl2} = \pi.r_1.s_1 - \pi.r_2.s_2$

pre strany kužeľov a zrezaného rotačného kužeľa platí

$s = s_1 - s_2 \rightarrow s_1 = s + s_2$

pomer strán a polomerov je rovnaký

$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow r_1 = \frac{s_1}{s_2}.r_2$

dosadíme

$\pi.r_1.s_1 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.(s + s_2) - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.r_1.s_2 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.\frac{s_1}{s_2}.r_2.s_2 - \pi.r_2.s_2 =$

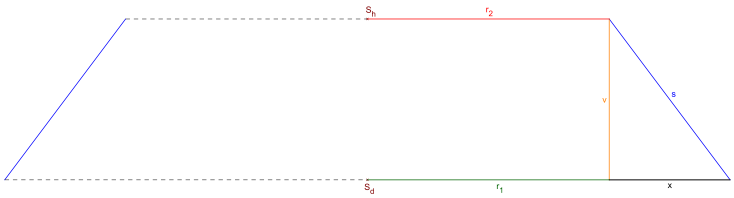
$= \pi.r_1.s + \pi.s_1.r_2 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.r_2.(s_1 - s_2) = \pi.r_1.s + \pi.r_2.s$

môžeme vyňať $\pi.s \rightarrow$ a tak dostaneme, čo sme chceli dokázať

$S_{pl} = \pi.s(r_1 + r_2)$

príklad:

Vypočítajte povrch a objem rotačného zrezaného kužeľa, ak je dĺžka polomeru dolnej podstavy 18, polomeru hornej podstavy 12 a výšky telesa 8.



vypočítame stranu

$x = r_1 - r_2 = 18 - 12 = 6$

$s = \sqrt{x^2 + v^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

dosadíme

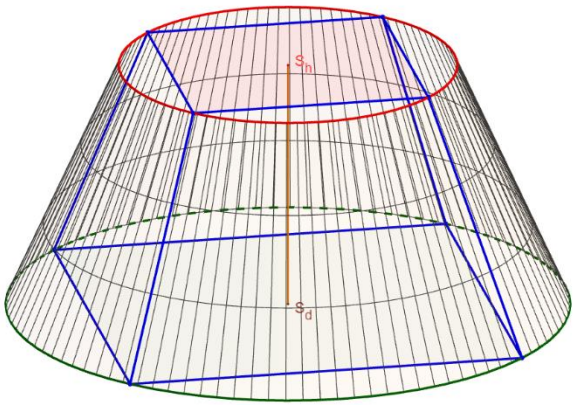
$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2) = \pi.18^2 + \pi.12^2 + \pi.10(18 + 12) = 324\pi + 144\pi + 300\pi$

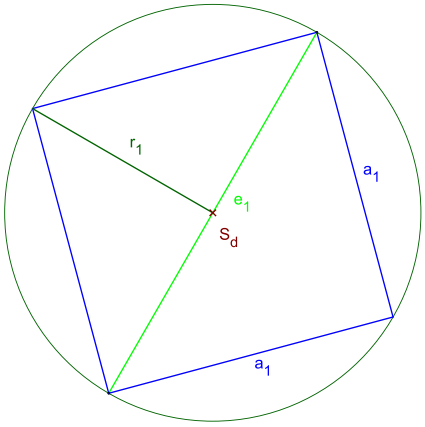
$S = 768\pi = 2\,412{,}7$

$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi.8}{3}(18^2 + 18.12.12^2) = \frac{8\pi}{3}(324 + 216 + 144) = \frac{8\pi}{3}.684$

$V = 1\,824\pi = 5\,730{,}3$

V akom pomere sú objemy zrezaného kužeľa a pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana vpísaného do kužeľa?





zrezaný kužeľ má objem

$V_{ZK} = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

zrezaný ihlan má objem

$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = 2r_1 \\ a_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2r_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.r_1$$

$a_2 = \sqrt{2}.r_2$

$S_1 = a_1^2 = \left(\sqrt{2}r_1\right)^2 = 2.r_1^2$

$S_2 = 2.r_2^2$

dosadíme do objemu

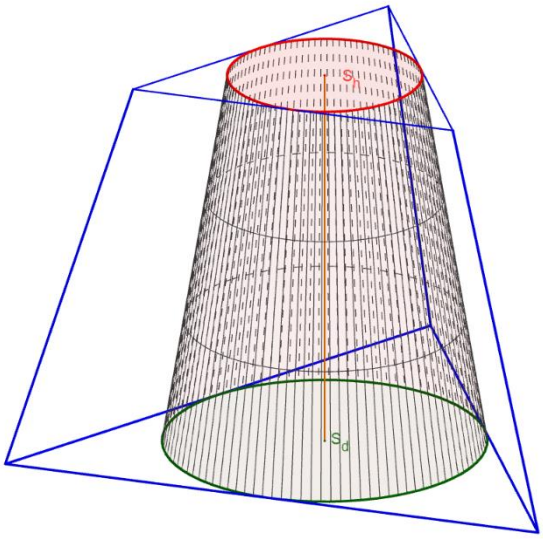
$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{v}{3}\left(2.r_1^2 + \sqrt{2.r_1^2.2.r_2^2} + 2.r_2^2\right) = \frac{v}{3}\left(2.r_1^2 + \sqrt{2^2.r_1^2.r_2^2} + 2.r_2^2\right) =$

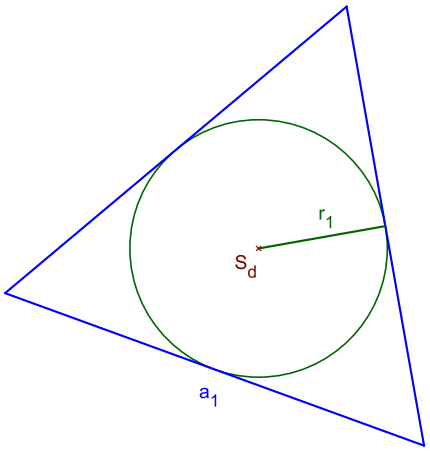
$= \frac{v}{3}(2r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2) = \frac{2v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$$\frac{V_{ZK}}{V_{ZI}} = \frac{\frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{\frac{2v}{3}(r_1^2 + r_1.r_2 + r_2^2)} = \frac{\frac{\pi v}{3}}{\frac{2v}{3}} = \; = \frac{\pi v}{3} \cdot \frac{3}{2v} = \frac{\pi}{2}$$

$V_{ZK} : V_{ZI} = \pi : 2$

Rotačný zrezaný kužeľ je vpísaný do pravidelného zrezaného trojbokého ihlana. O koľko percent má menší objem?





$V_{ZK} = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

obsahy podstáv – obsahy rovnostranných trojuholníkov

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.a_1^2$

$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.a_2^2$

$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}.a_1^2 + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}.a_1^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.a_2^2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.a_2^2\right) = \frac{v}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}.a_1^2 + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2.a_1^2.a_2^2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.a_2^2\right) =$

$= \frac{v}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}.a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}.a_1a_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}.a_2^2\right) = \frac{v}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}(.a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2) = \frac{\sqrt{3}v}{12}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

$r_1 = \rho_1 = \frac{a_1}{2\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{a_1}{2\,\mathrm{tg}\,60°} = \frac{a_1}{2\sqrt{3}}$

$r_2 = \rho_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{3}}$

$V_{ZK} = \frac{\pi v}{3}\left[\left(\frac{a_1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a_1}{2\sqrt{3}}.\frac{a_2}{2\sqrt{3}} + \left(\frac{a_2}{2\sqrt{3}}\right)^2\right] = \frac{\pi v}{3}\left(\frac{a_1^2}{12} + \frac{a_1a_2}{12} + \frac{a_2^2}{12}\right) = \frac{\pi v}{36}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

$\frac{V_{ZK}}{V_{ZI}} = \frac{\frac{\pi v}{36}(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)}{\frac{\sqrt{3}v}{12}(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)} = \frac{\frac{\pi v}{36}}{\frac{\sqrt{3}v}{12}} = \frac{\pi v}{36}.\frac{12}{\sqrt{3}v} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}604\,6$

percentuálne 60,46 % objemu zrezaného ihlana tvorí objem vpísaného zrezaného kužeľa

100 % – 60,46 % = 39,54 %

objem zrezaného kužeľa je o 39,54 % menší ako zrezaného ihlana