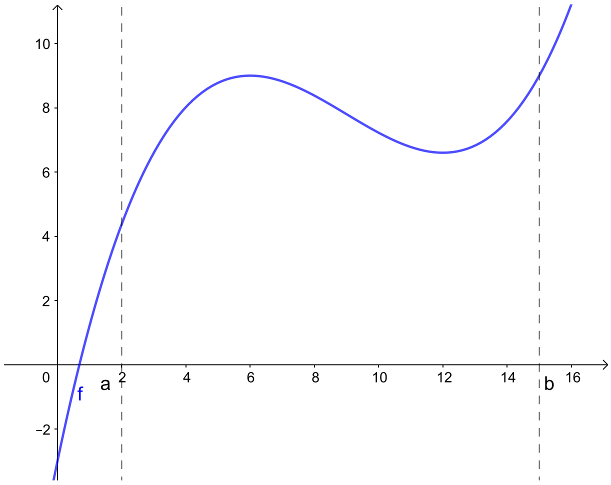
Určitý integrál

Zoberme jednu funkciu:

$$f(x) = \frac{x^3}{45} - \frac{3}{5}x^2 + \frac{24}{5}x - 3$$

Skúsme určiť obsah plochy ohraničenej grafom (krivkou) funkcie f, x-ovou osou, a priamkami rovnobežnými s y-ovou osou prechádzajúcimi hodnotami a = 2 a b = 15 na x-ovej osi.

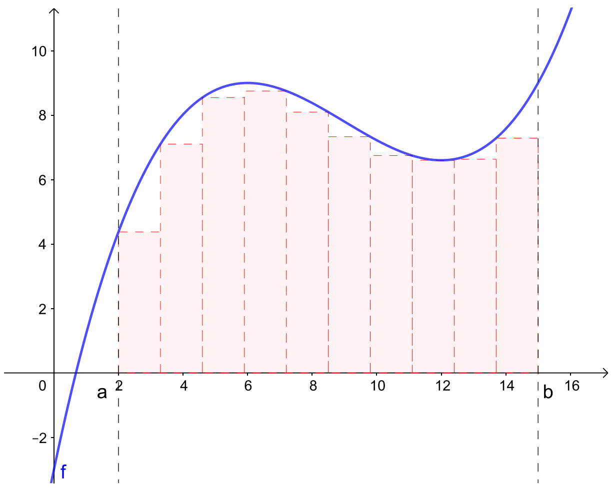


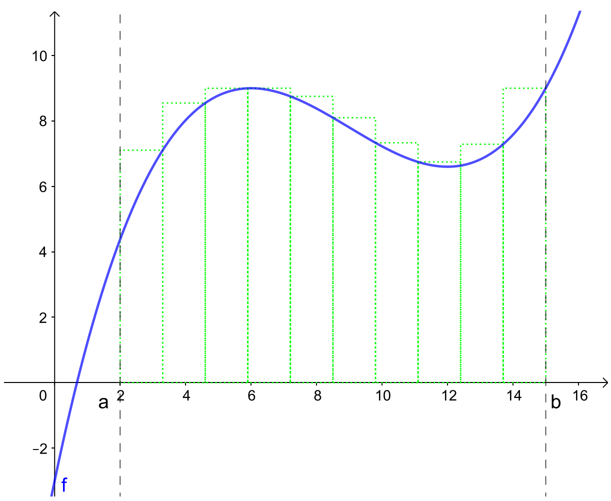
Rozdeľme preto interval ⟨a; b⟩ na desať rovnakých častí – dĺžka jedného intervalu vychádza na $\frac{15-2}{10} = 1{,}3$:

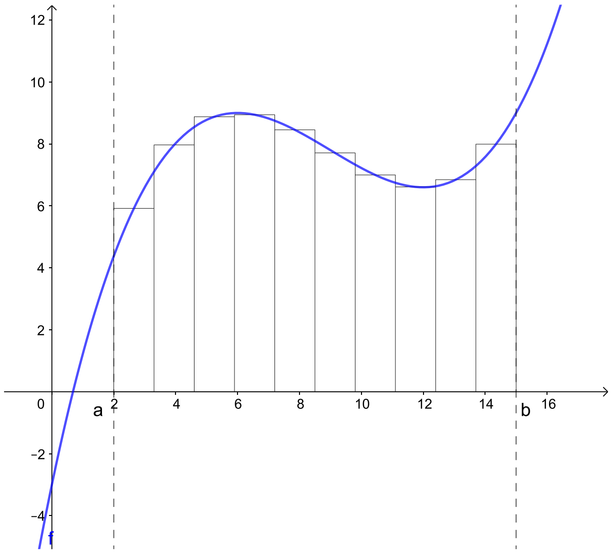
I_1: ⟨2; 3,3⟩; I_2: ⟨3,3; 4,6⟩; I_3: ⟨4,6; 5,9⟩; … ; I_9: ⟨12,4; 13,7⟩; I_{10}: ⟨13,7; 15⟩

Do tých intervaloch dokreslíme obdĺžniky trojakým spôsobom:

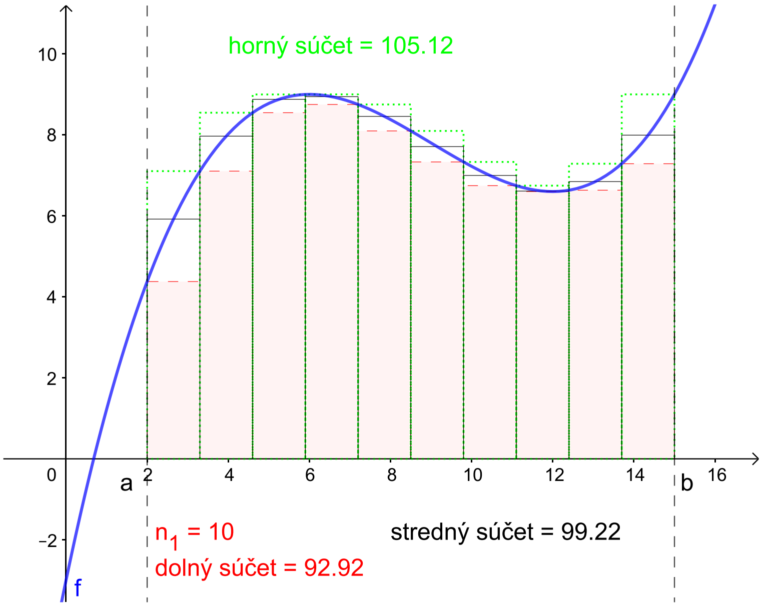
1, aby presne 1 bod funkcie bol spoločný s obdĺžnikom (aby sa dotýkal jedným vrcholom krivky zdola) – tomu môžeme hovoriť, že obdĺžniky sú vpísané
2, aby celá časť krivky z aktuálneho intervalu bola vo vnútri obdĺžnika (aby sa dotýkal jedným vrcholom krivky zhora) – tomu môžeme hovoriť, že obdĺžniky sú opísané
3, aby stred štvrtej strany obdĺžnika ležal na krivke







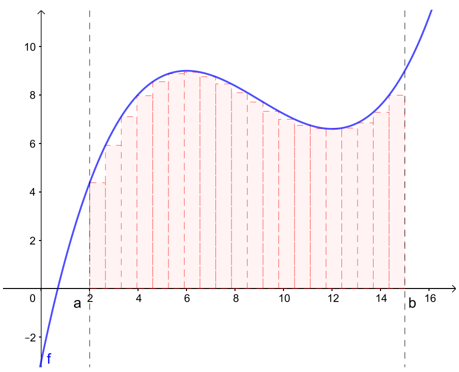
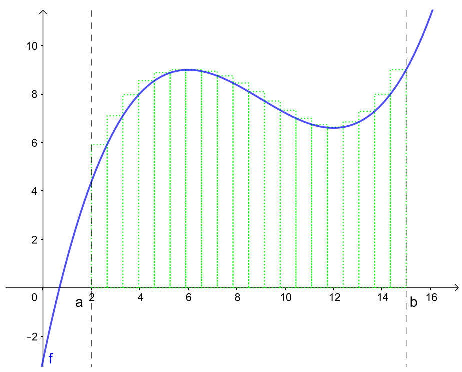
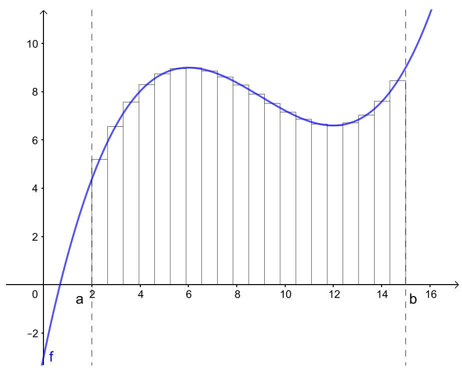
Z obrázkov vidíme, že súčty obsahov obdĺžnikov pri troch rôznych spôsoboch budú iné. Nepotrebujeme mať extra logiku, aby sme prišli na to, že v prvom prípade vychádza najmenší súčet – ***dolný integrálny súčet*** alebo iba ***dolný súčet***. V druhom prípade vychádza najväčší súčet – ***horný integrálny súčet*** alebo iba ***horný súčet***. A tretí súčet, čo nemá názov, bude medzi tými predchádzajúcimi hodnotami.

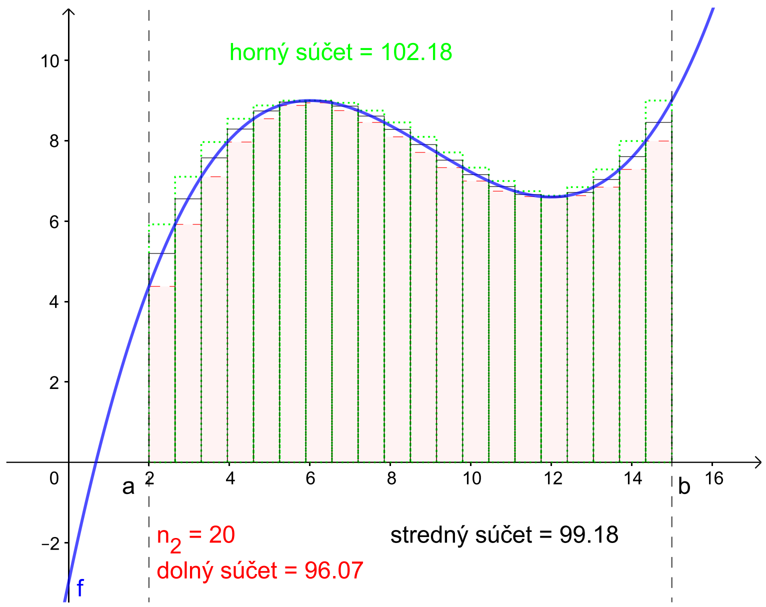


Zmeňme teraz delenie, zdvojnásobme počet intervalov ⇒ dĺžka intervalov bude polovičná: $\frac{15-2}{20} = 0{,}65$:

I_1: ⟨2; 2,65⟩; I_2: ⟨2,65; 3,3⟩; I_3: ⟨3,3; 3,95⟩; … ; I_{19}: ⟨13,7; 14,35⟩; I_{20}: ⟨14,35; 15⟩

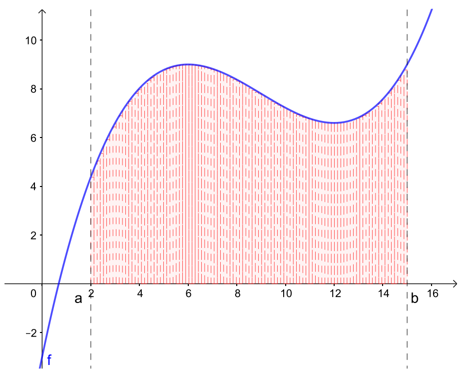
Znovu tými tromi spôsobmi dokreslíme obdĺžniky. A potom počítame súčty obsahov.

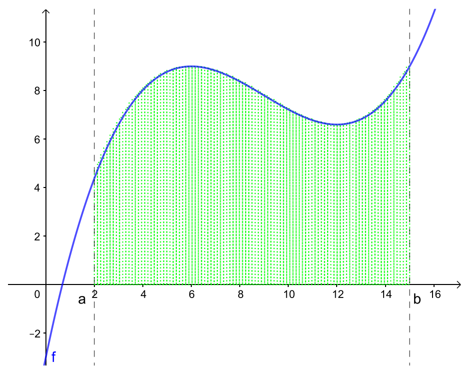




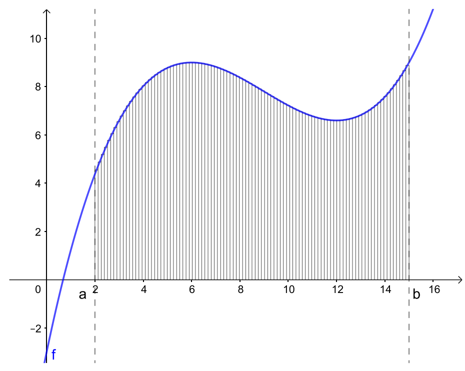


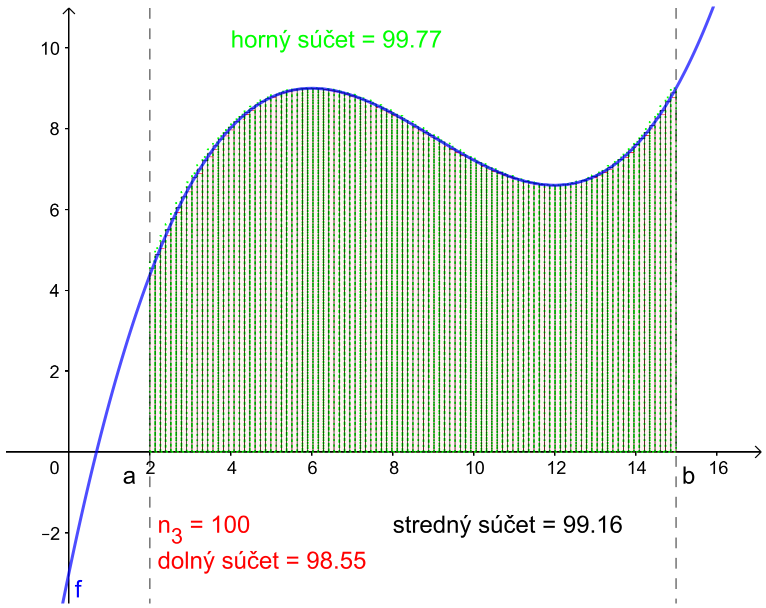
A tretíkrát interval rozdelíme na 100 rovnakých častí – dĺžka intervalov sa rovná: $\frac{15-2}{100} = 0{,}13$:

I_1: ⟨2; 2,13⟩; I_2: ⟨2,13; 2,26⟩; I_3: ⟨2,26; 2,39⟩; … ; I_{99}: ⟨14,74; 14,87⟩; I_{100}: ⟨14,87; 15⟩









Teraz porovnajme rozdiely medzi horným a dolným súčtom:

počet intervalov	*dolný súčet*	*horný súčet*	*rozdiel*
10	92,92	105,12	12,20
20	96,07	102,18	6,11
100	98,55	99,77	1,22

Čím jemnejšie delenie použijeme (viac intervalov), tým bližšie sa dostanú tie dve hodnoty k sebe – ich rozdiel sa blíži k nule. Ak zoberme limitu týchto súčtov kde n → ∞, potom dostaneme určitý integrál funkcie *f* na intervale ⟨a; b⟩.

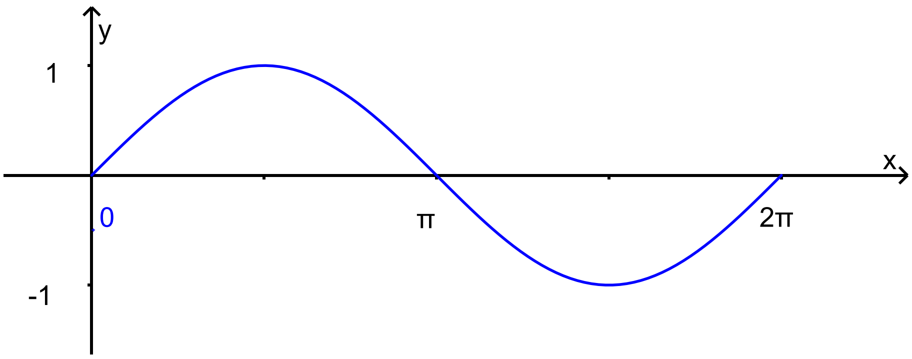
D. ***Určitý integrál funkcie f na intervale ⟨a; b⟩*** je obsah plochy pod grafom funkcie.

$$\int_a^b f(x)dx$$

P. Hranica tvoria: graf funkcie; *x*-ová os a priamky s rovnicami x = a a x = b.

P. Obsah plochy „pod grafom funkcie" bude záporné číslo, ak graf funkcie sa nachádza pod *x*-ovou osou.

Preto napríklad určitý integrál funkcie sin x na intervale ⟨0; 2π⟩ sa rovná nule. Sínusoida má rovnakú časť nad a pod *x*-ovou osou na tom intervale.



Samozrejme keby sme museli takto počítať určité integrály, ťažko by sme mohli zistiť presnú hodnotu. Na výpočet ale máme dobrú pomôcku.

V. *Newtonov–Leibnizov* vzorec

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

kde F(x) označuje neurčitý integrál (primitívnu funkciu) funkcie *f*.

Musíme určiť neurčitý integrál tej funkcie, dosadiť horný a dolný koniec intervalu do toho. Potom ich rozdiel je vlastne ten hľadaný obsah.

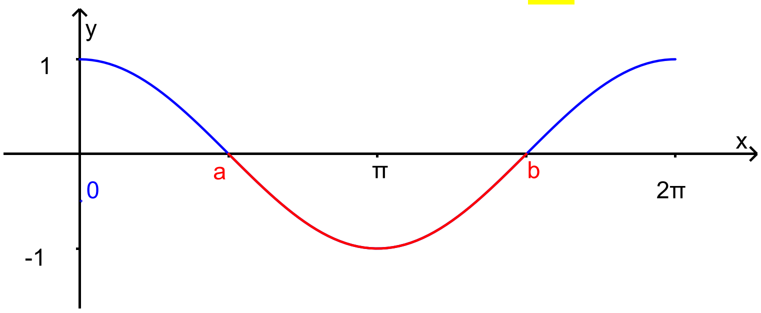
Vypočítajme náš úvodný príklad.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_2^{15} \frac{x^3}{45} - \frac{3}{5}x^2 + \frac{24}{5}x - 3\,dx = \left[\frac{x^4}{180} - \frac{1}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - 3x\right]_2^{15} =$$

$$= \left(\frac{15^4}{180} - \frac{1}{5}15^3 + \frac{12}{5}15^2 - 3.15\right) - \left(\frac{2^4}{180} - \frac{1}{5}2^3 + \frac{12}{5}2^2 - 3.2\right) = \frac{405}{4} - \frac{94}{45} = \frac{17849}{180} = 99{,}161\,1$$

Vypočítajme určitý integrál funkcie cos x na intervale $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$$

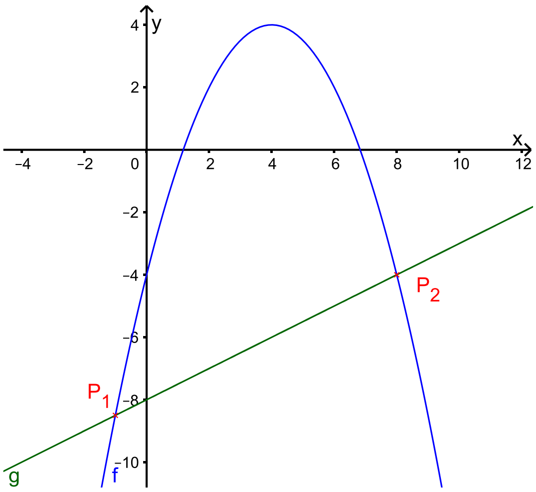


Obsah plochy preto vychádza na zápornú hodnotu, lebo krivka je pod osou medzi hodnotami a a b (viď. obrázok).

Určitým integrálom nie iba plochu ohraničenú funkciou a *x*-ovou osou medzi hodnotami ⟨a; b⟩ môžeme vypočítať. Takisto sa dá vypočítať obsah plochy medzi grafmi dvoch funkcií. Od „hornej" funkcie treba odčítať „dolnú" funkciu – potom určitý integrál tohto rozdielu je hľadaný obsah.

Dané sú funkcie *f* a *g*: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$; $g(x) = \frac{x}{2} - 8$. Vypočítajme obsah plochy medzi grafmi funkcií.

najprv treba určiť spoločné body grafov – tie budú hranice určitého integrálu
preto riešime sústavu



$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 = \frac{x}{2} - 8$ /.2

$-x^2 + 8x - 8 = x - 16$ /-x + 16

$-x^2 + 7x + 8 = 0$ /.(-1)

$x^2 - 7x - 8 = 0$

$(x + 1).(x - 8) = 0$

$x_1 = -1 = a$; $x_2 = 8 = b$ (vypočítať druhé, *y*-ové súradnice spoločných bodov nepotrebujeme)

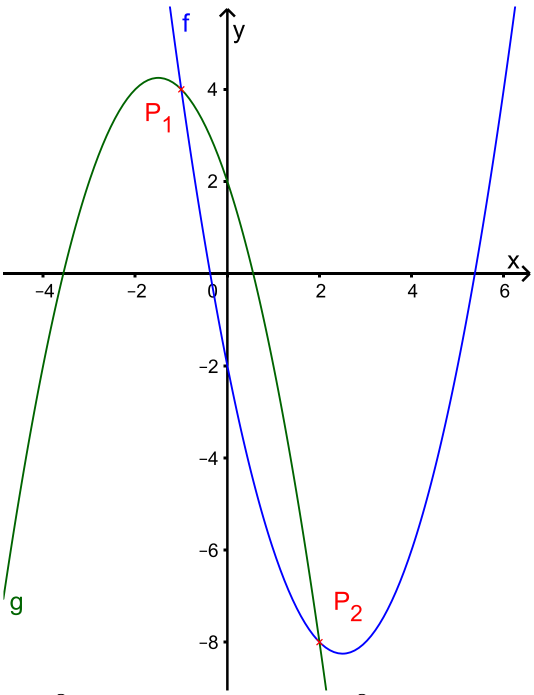
z obrázku je zrejmé. že medzi bodmi -1 a 8 funkcia *f* je nad funkciou *g*

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{8} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 - \left(\frac{x}{2} - 8\right) dx = \int_{-1}^{8} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7x}{2} + 4\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}.\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{8} = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{7x^2}{4} + 4x\right]_{-1}^{8} =$$

$$= -\frac{8^3}{6} + \frac{7.8^2}{4} + 4.8 - \left(-\frac{(-1)^3}{6} + \frac{7.(-1)^2}{4} + 4(-1)\right) = \frac{176}{3} - \left(-\frac{25}{12}\right) = \frac{243}{4}$$

Dané sú funkcie *f* a *g*: $f(x) = x^2 - 5x - 2$; $g(x) = -x^2 - 3x + 2$. Vypočítajme obsah plochy medzi grafmi funkcií.



$x^2 - 5x - 2 = -x^2 - 3x + 2$ /+ $x^2 + 3x - 2$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \qquad /:2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$
$x_1 = -1 = a$; $x_2 = 2 = b$

$$\int_a^b g(x) - f(x)dx = \int_{-1}^{2} -x^2 - 3x + 2 - (x^2 - 5x - 2)dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\,dx =$$
$$= \left[-2.\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$
$$= -\frac{2.2^3}{3} + 2^2 + 4.2 - \left(-\frac{2.(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4.(-1)\right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$$

Využitie určitého integrálu

1, dĺžka krivky:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

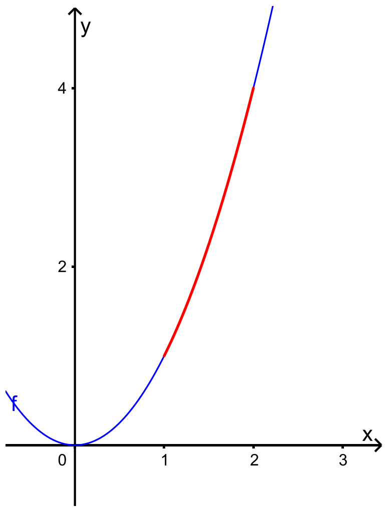
2, objem rotačného telesa:

$$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$$

3, povrch rotačného telesa:

$$S = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

Vypočítajme dĺžku časti paraboly s rovnicou $f(x) = x^2$ medzi hodnotami 1 a 2.

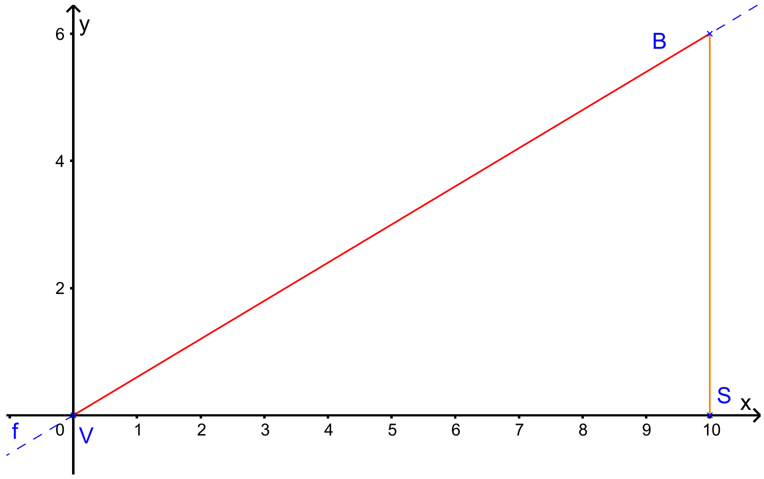


$f'(x) = (x^2)' = 2x$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$
$$= \left[\frac{\ln\left|\sqrt{1+4x^2} + 2x\right|}{4} + \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln\left|\sqrt{1+4.2^2} + 2.2\right|}{4} + \frac{2\sqrt{1+4.2^2}}{2} -$$
$$-\left(\frac{\ln\left|\sqrt{1+4.1^2}+2.1\right|}{4} + \frac{1\sqrt{1+4.1^2}}{2}\right) = \frac{\ln\left|\sqrt{17}+4\right|}{4} + \frac{2\sqrt{17}}{2} - \frac{\ln\left|\sqrt{5}+2\right|}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 3{,}167\,8$$

Vypočítajme objem rotačhého kužeľa s polomerom podstavy r = 6 a výškou v = 10.

tento kužeľ vznikol rotáciou pravouhlého trojuholníka s odvesnami r a v okolo výšky



smernica priamky: $k_f = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

funkcia má predpis: $f(x) = \frac{3}{5}x + b$, a keďže priamka (graf funkcie) prechádza začiatkom súradnicovej sústavy, preto b = 0

$f(x) = \frac{3}{5}x$

$$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx = \pi.\int_0^{10}\left(\frac{3}{5}x\right)^2 dx = \pi.\int_0^{10}\frac{9}{25}x^2dx = \pi.\left[\frac{9}{25}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \pi.\left[\frac{3x^3}{25}\right]_0^{10} =$$

$$= \pi.\left(\frac{3.10^3}{25} - \frac{3.0^3}{25}\right) = \pi.\left(\frac{3000}{25} - \frac{0}{25}\right) = 120\pi = 376{,}99$$

keby sme počítali vzorcom: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi 6^2.10 = 120\pi \rightarrow$ rovnaký výsledok

Môžeme zovšeobecniť tento objem.

smernica priamky: $k_f = \frac{r}{v}$

$f(x) = \frac{r}{v}.x$

$$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx = \pi.\int_0^{v}\left(\frac{r}{v}.x\right)^2 dx = \pi.\int_0^{v}\frac{r^2}{v^2}.x^2dx = \pi.\left[\frac{r^2}{v^2}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{v} =$$

$$= \pi.\left(\frac{r^2}{v^2}.\frac{v^3}{3} - \frac{r^2}{v^2}.\frac{0^3}{3}\right) = \pi.\left(\frac{r^2v}{3} - \frac{0}{3}\right) = \pi.\frac{r^2v}{3}$$

Vypočítajme povrch plášťa predchádzajúceho rotačhého kužeľa (r = 6; v = 10).

$f(x) = \frac{3}{5}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5}$

$$S = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi.\int_0^{10}\frac{3}{5}x.\sqrt{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2}dx = 2\pi.\int_0^{10}\frac{3}{5}x.\frac{\sqrt{34}}{5}dx =$$

$$= 2\pi.\int_0^{10}\frac{3\sqrt{34}}{25}x\,dx = 2\pi.\left[\frac{3\sqrt{34}}{25}.\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 2\pi.\left[\frac{3\sqrt{34}.x^2}{50}\right]_0^{10} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\sqrt{34}.10^2}{50} - \frac{3\sqrt{34}.0^2}{50}\right) = 2\pi\left(\frac{300\sqrt{34}}{50} - \frac{0}{50}\right) = 12\sqrt{34}.\pi = 219{,}82$$

klasicky počítaný povrch: $S_{pl} = \pi rs = \pi 6\sqrt{6^2+10^2} = 6\sqrt{136}.\pi = 12\sqrt{34}.\pi$

Všeobecne:

$f(x) = \frac{r}{v}.x \rightarrow f'(x) = \frac{r}{v}$; $s = \sqrt{r^2+v^2}$

$$S = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi.\int_0^{v}\frac{r}{v}x.\sqrt{1+\left(\frac{r}{v}\right)^2}dx = 2\pi.\int_0^{v}\frac{r\sqrt{v^2+r^2}}{v^2}x\,dx =$$

$$= 2\pi.\left[\frac{r.s}{v^2}.\frac{x^2}{2}\right]_0^{v} = 2\pi.\left(\frac{r.s}{v^2}.\frac{v^2}{2} - \frac{r.s}{v^2}.\frac{0^2}{2}\right) = 2\pi.\left(\frac{r.s}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2\pi\frac{r.s}{2} = \pi rs$$