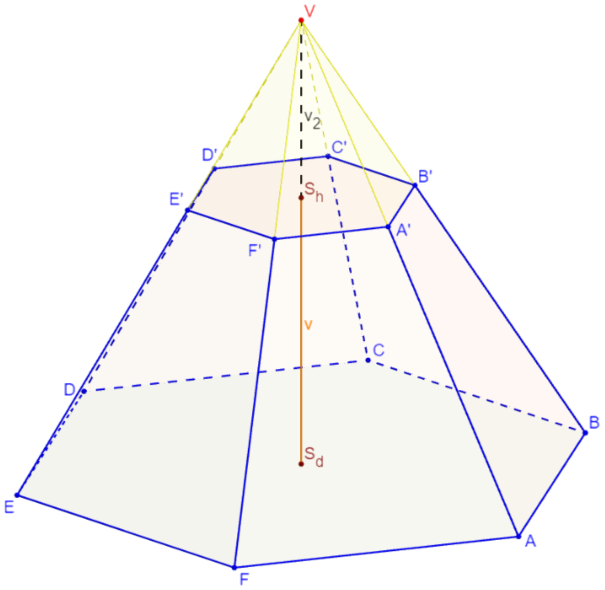
A csonkagúla felszíne és térfogata
(Povrch a objem zrezaného ihlana)

Ha adott egy gúla és veszünk egy a gúlát metsző síkot, mely párhuzamos az alaplappal, akkor ez a sík a testet két testre osztja. Az egyik egy gúla lesz (az eredeti gúla kicsinyítve – a középpontos hasonlóság középpontja a gúla csúcsa, a hasonlósági arány pedig a magasságok hányadosa: a kicsinyített magassága osztva az eredetiével).
A másik test pedig a csonkagúla (ABCDEFA'B'C'D'E'F').



alaplapjai (podstavy) (alaplap: ABCDEF és fedőlap: A'B'C'D'E'F') – két párhuzamos, hasonló sokszög
testmagasság (výška telesa): v – az alaplapok távolsága
alapél (hrana podstavy) (az alaplap éle: AB, BC, …, E'F', F'A') – az alaplap oldala
oldalél (bočná hrana) (AA', BB', CC', … FF') – az alap- és fedőlap csúcsát összekötő szakasz
oldallap (bočná stena) (ABB'A', BCC'B', …) – határát két szomszédos oldalél és két alapél képezi
az oldallapok trapézok
számuk megegyezik az alaplap csúcsainak (oldalainak) számával
a csonkagúla palástja (plášť zrezaného ihlana) – oldallapjainak összessége

egyenes csonkagúla (kolmý zrezaný ihlan) – ha az eredeti gúla egyenes volt, akkor a csonkagúla is az lesz: az alaplapok középpontját összekötő szakasz merőleges az alaplapokra (azonos a testmagassággal)
szabályos n oldalú csonkagúla (pravidelný n-boký zrezaný ihlan) – ha az eredeti gúla szabályos n oldalú volt, akkor a csonkagúla is az lesz
alaplapjai szabályos n-szögek
az alaplapok középpontját összekötő szakasz merőleges az alaplapokra (azonos a testmagassággal)
⇒ az oldallapok egyenlő szárú trapézok
⇒ oldallaplai egybevágók

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$
$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

B.

jelöljük az eredeti gúla elemeit 1-es indexszel 1 – V_1, S_1, v_1
jelöljük a kicsinyített gúla elemeit 2-es indexszel – V_2, S_2, v_2
jelöljük a csonkagúla elemeit index nélkül – V, S, v

a csonkagúla térfogatát térfogatok különbségeként kapjuk:

$V = V_1 - V_2$

$V = \frac{1}{3}S_1.v_1 - \frac{1}{3}S_2.v_2$ /.3

$3V = S_1.v_1 - S_2.v_2 = S_1.(v + v_2) - S_2.v_2 = S_1.v + S_1.v_2 - S_2.v_2 = S_1.v + v_2(S_1 - S_2)$

$3V = S_1.v + S_2.v_2\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)$

a magasságokra érvényes

$v = v_1 - v_2 \;\rightarrow\; v_1 = v + v_2$

a hasonlósági együtthatókra fennáll (ellentett középpontos hasonlóság, mint amit a csonkagúla meghatározásánál említettünk)

$\lambda = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v+v_2}{v_2}$

rendezzük

$\lambda.v_2 = v + v_2$

$\lambda.v_2 - v_2 = v$

$v_2(\lambda - 1) = v$

ekkor az alaplapok területeire érvényes

$\lambda^2 = \frac{S_1}{S_2} \rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$

$3V = S_1.v + S_2.v_2(\lambda^2 - 1) = S_1.v + S_2.v_2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

a kiemelt kifejezés helyére v kerül

$3V = S_1.v + S_2.v(\lambda + 1) = S_1.v + S_2.v.\lambda + S_2.v$

$3V = S_1.v + S_2.v.\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + S_2.v = S_1.v + v.\sqrt{S_2^2\frac{S_1}{S_2}} + S_2.v$

egyszerűsítés és kiemelés után kapjuk ezt

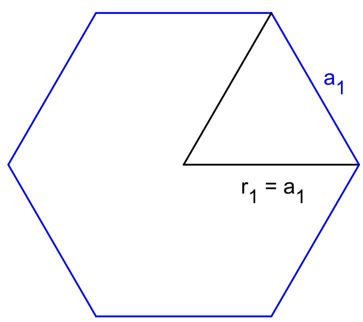
$3V = S_1.v + v.\sqrt{S_1.S_2} + S_2.v = v\left(S_1 + \sqrt{S_1.S_2} + S_2\right)$

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

példa:

Számítsuk ki a szabályos hatoldalú csonkagúla felszínét és térfogatát, ha alaplapjának éle 42, fedőlapjáé 18, és oldaléle 37.

alaplapjai szabályos hatszögek – felosztjuk hat egyenlő szárú (tulajdonképpen egyenlő oldalú) háromszögre



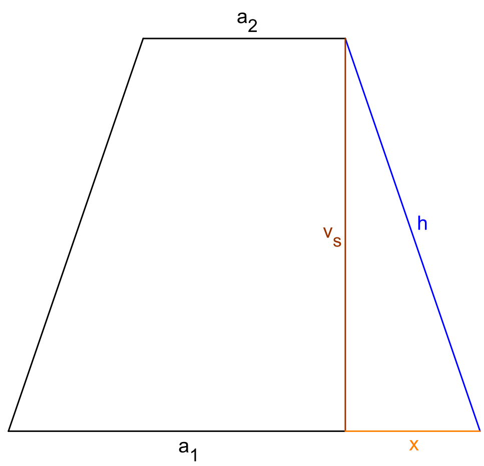
$S_{\triangle 1} = \frac{ab.\sin\gamma}{2} = \frac{a_1^2.\sin 60°}{2} = \frac{42^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 441\sqrt{3} = 763{,}834$

$S_1 = 6.S_{\triangle 1} = 6.763{,}834 = 4\,583{,}01$

$S_{\triangle 2} = \frac{a_2^2.\sin 60°}{2} = \frac{18^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 81\sqrt{3} = 140{,}296$

$S_2 = 6.S_{\triangle 2} = 6.140{,}296 = 841{,}777$

palástját egyenlő szárú trapézok alkotják



$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{42-18}{2} = 12$

$v_s = \sqrt{h^2 - x^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1\,369 - 144} = 35$

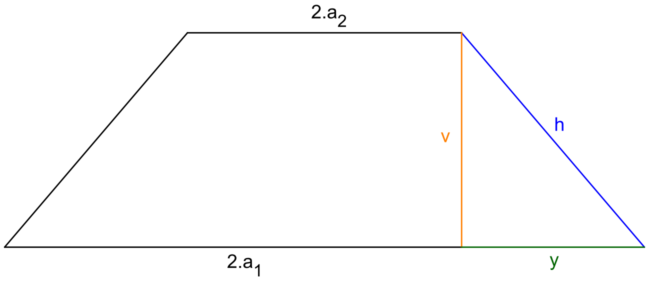
$S_{pl} = 6.\frac{a_1+a_2}{2}.v_s = 6.\frac{42+18}{2}.35 = 6\,300$

takže povrch

$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 4\,583{,}0 + 841{,}78 + 6\,300$

$S = 11\,724{,}8$

a térfogathoz még a testmagasság hiányzik – a szemközti oldalélekhez illeszkedő síkmetszet egy trapéz, melynek a magassága maga a hiányzó testmagasság



$y = \frac{2a_1 - 2a_2}{2} = \frac{2.42-2.18}{2} = 24$

$v = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{37^2 - 24^2} = \sqrt{1\,369 - 576} = \sqrt{793} = 28{,}160$

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{28{,}160}{3}\left(4\,583{,}01 + \sqrt{4\,583{,}01.841{,}777} + 841{,}777\right)$

$V = 69\,358{,}0$

Számítsuk ki a szabályos négyoldalú csonkagúla felszínét és térfogatát, ha alaplapjának éle 22, fedőlapjáé 12, és magassága 8.

alaplapjai négyzetek

$S_1 = a_1^2 = 22^2 = 484$

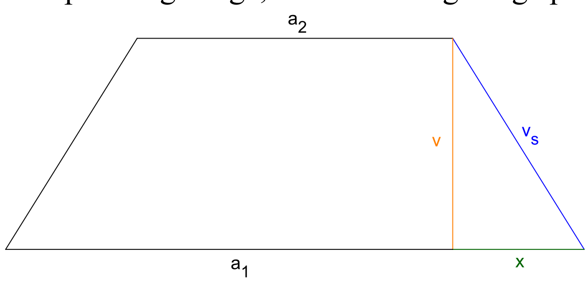
$S_2 = a_2^2 = 12^2 = 144$

mivel a testmagasság adott, így előbb a térfogatot számoljuk ki

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{8}{3}\left(484 + \sqrt{484.144} + 144\right)$

$V = 2\,378{,}67$

ha megnézzük azt a tengelymetszetet, mely a szemközti alapélek középpontjához illeszkedik (egy trapéz), a szárak az oldallapok magassága, a metszet magassága pedig maga a testmagasság



$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{22-12}{2} = 5$

$v_s = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}434$

$S_{pl} = 4.\frac{a_1+a_2}{2}.v_s = 4.\frac{22+12}{2}.9{,}434 = 641{,}511$

$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 484 + 144 + 641{,}511$

$S = 1\,269{,}511$

Számítsuk ki a szabályos ötoldalú csonkagúla felszínét és térfogatát, ha alaplapjának éle 24, fedőlapjáé 10, és magassága 12.

$S_1 = \frac{5}{4}.\frac{a_1^2}{\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{5}{4}.\frac{24^2}{\mathrm{tg}\,36°}$

$S_1 = 990{,}995$

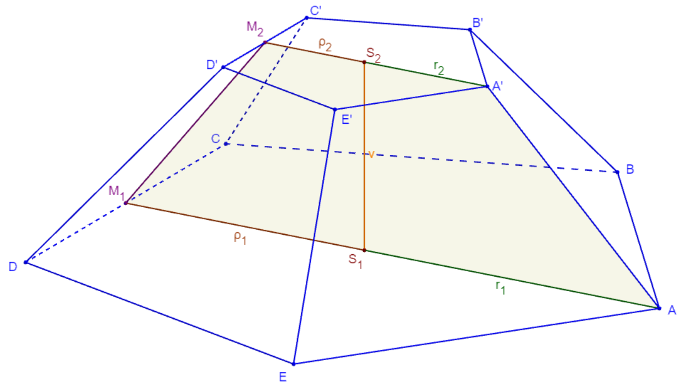
$S_2 = \frac{5}{4}.\frac{10^2}{\mathrm{tg}\,36°}$

S_2 = 172,048

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{12}{3}\left(990{,}995 + \sqrt{990{,}995.172{,}048} + 172{,}048\right)$

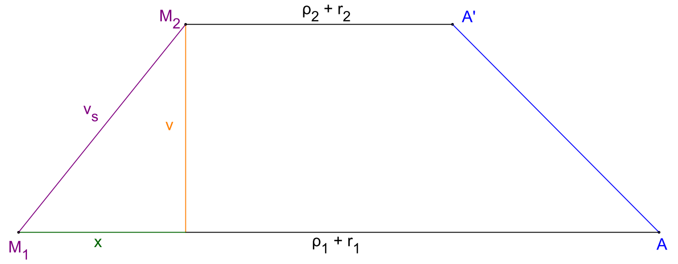
V = 6 303,83

az alaplapok középpontjain áthaladó, az egyik oldalélhez illeszkedő tengelymetszet az alaplapok szemközti éleit felezi – M_1 és M_2 pontok → trapéz keletkezik



az alaplapok középpontjai a keletkezett trapéz alapjait két szakaszra osztják: a beírt körök sugarára (ρ_1 és ρ_2) és a körülírt körök sugarára (r_1 és r_2)

továbbá a trapéz egyik szára a csonkagúla oldaléle, a másik pedig az oldallap magassága



kiszámítjuk a beírt- és körülírt körök sugarát

$\rho_1 = \frac{a_1}{2\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{24}{2\,\mathrm{tg}\,36°} = 16{,}517$

$\rho_2 = \frac{10}{2\,\mathrm{tg}\,36°} = 6{,}882$

$x = \rho_1 - \rho_2 = 16{,}517 - 6{,}882 = 9{,}635$

$v_s = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{12^2 + 9{,}635^2} = 15{,}389$

$S_{pl} = 5.\frac{a_1 + a_2}{2}.v_s = 5.\frac{24+10}{2}.15{,}389 = 1\,308{,}080$

$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 990{,}995 + 172{,}048 + 1\,308{,}080$

S = 2 471,123