A binomiális tétel
(Binomická veta)

Az első évfolyamban megismerkedtünk néhány képlettel, amiket a kifejezések rendezésénél használunk. Szerepelt közöttük kéttagú kifejezés (összeg és különbség) második és harmadik hatványa. Éppen ezen képletek általánosítását nevezzük ***Newton-féle binomiális tétel***nek. Segítségével meghatározhatjuk egy kéttagú kifejezés tetszőleges természetes hatványát.

T.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k =$$

$$= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}.b^3 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$n \in \mathbb{N}$

Egy kéttagú kifejezés n-edik hatványaként egy $(n + 1)$ tagú polinom keletkezik – az úgynevezett ***binomiális kifejtés*** (binomický rozvoj). Benne minden tag három tényezőből áll:

- együttható
- a zárójel első tagjának hatványa
- a zárójel második tagjának hatványa

M. Az első és a második tagot is előjellel együtt kell hatványozni. Ez azt jelenti, hogy:

- amennyiben pozitív együtthatójú tagot hatványozunk → minden tagja pozitív előjelű lesz
- negatív tagok páros hatványai szintén pozitív előjelűek
- csak a negatív tagok páratlan hatványai lesznek negatív előjelűek (a különbség binomiális kifejtésében az előjelek váltakoznak)

M.

Az együtthatók a binomiális együtthatók – a Pascal-féle háromszög egy sora.

A zárójel első tagjának a hatványa a lehetséges legnagyobb kitevőtől (n-edik hatvány) indul, és minden következő tagban eggyel csökken, míg el nem éri a lehetséges legkisebb kitevőt (a nullát).

Fordítva – zárójel második tagjának a hatványa a legkisebb kitevővel (nullával) indul, majd növekszik egészen n-ig.

M. Mivel az n alatt a nulla és az n alatt az n is eggyel egyenlő $\left[\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\right]$; illetve a kifejezések és a számok nulladik hatványa egyenlő eggyel (kivétel a nulla nulladik hatványa – ami nem létezik) ⇒ a kifejtés első tagja csak a zárójel első tagjának az n-edik hatványa, míg utolsó tagja egyedül a második tag n-edik hatványát jelenti. A kifejtés második és utolsó előtti tagjának együtthatója pontosan n, mert $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Vagyis a binomiális kifejtés egyszerűbb alakra változik:

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}.b + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}.b^3 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k + \ldots + n.a.b^{n-1} + b^n$$

Mikor a binomiális kifejtésnek csak egy konkrét tagja a kérdés tárgya, hogy lehet ezt meghatározni? Jelöljük őt, mint a kifejtés k-adik tagját (a sorszáma alapján).

1. tag: $\binom{n}{0}a^n b^0$

2. tag: $\binom{n}{1}a^{n-1}.b^1$

3. tag: $\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2$

4. tag: $\binom{n}{3}a^{n-3}.b^3$

…

k-adik tag: $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}.b^{k-1}$

$$a_k = \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}.b^{k-1}$$

példa:

Írjuk fel a hatványok binomiális kifejtését:

a, $(5x^2 + 3)^5$ b, $(3x^3 - 4)^6$ c, $(-2x + 4x^3)^7$

d, $(-2x - 1)^8$ e, $\left(3x - \frac{4}{3}\right)^7$ f, $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4x}\right)^6$

a Pascal-féle háromszögből származó együtthatók: 1, 5, 10, 10, 5, 1

$(5x^2 + 3)^5 = 1.(5x^2)^5.3^0 + 5.(5x^2)^4.3^1 + 10.(5x^2)^3.3^2 + 10.(5x^2)^2.3^3 + 5.(5x^2)^1.3^4 + 1.(5x^2)^0.3^5 =$
$= 3\,125x^{10} + 5.625x^8.3 + 10.125x^6.9 + 10.25x^4.27 + 5.5x^2.81 + 243 =$
$= 3\,125x^{10} + 9\,375x^8 + 11\,250x^6 + 6\,750x^4 + 2\,025x^2 + 243$

az együtthatók: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$(3x^3 – 4)^6 = 1.(3x^3)^6.(-4)^0 + 6.(3x^3)^5.(-4)^1 + 15.(3x^3)^4.(-4)^2 + 20.(3x^3)^3.(-4)^3 + 15.(3x^3)^2.(-4)^4 +$
$+ 6.(3x^3)^1.(-4)^5 + 1.(3x^3)^0.(-4)^6 = 729x^{18} + 6.243x^{15}.(-4) + 15.81x^{12}.16 + 20.27x^9.(-64) +$
$+ 15.9x^6.256 + 6.3x^3.(-1\,024) + 4\,096 =$
$= 729x^{18} – 5\,832x^{15} + 19\,440x^{12} – 34\,560x^9 + 34\,560x^6 – 18\,432x^3 + 4\,096$

az együtthatók: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$(-2x + 4x^3)^7 = 1.(-2x)^7.(4x^3)^0 + 7.(-2x)^6.(4x^3)^1 + 21.(-2x)^5.(4x^3)^2 + 35.(-2x)^4.(4x^3)^3 + 35.(-2x)^3.(4x^3)^4 +$
$+ 21.(-2x)^2.(4x^3)^5 + 7.(-2x)^1.(4x^3)^6 + 1.(-2x)^0.(4x^3)^7 = -128x^7 + 7.64x^6.4x^3 + 21.(-32)x^5.16x^6 +$
$+ 35.16x^4.64x^9 + 35.(-8)x^3.256x^{12} + 21.4x^2.1\,024x^{15} + 7.(-2)x.4\,096x^{18} + 16\,384x^{21} =$
$= -128x^7 + 1\,792x^9 – 10\,752x^{11} + 35\,840x^{13} – 71\,680x^{15} + 86\,016x^{17} – 57\,344x^{19} + 16\,384x^{21}$

az együtthatók: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

rendezzük – a zárójelben kiemelünk -1-et, utána pedig hatványozzuk

$(-2x – 1)^8 = [-1.(2x + 1)]^8 = (-1)^8.(2x + 1)^8 = 1.(2x + 1)^8 = (2x + 1)^8 = 1.(2x)^8.1^0 + 8.(2x)^7.1^1 +$
$+ 28.(2x)^6.1^2 + 56.(2x)^5.1^3 + 70.(2x)^4.1^4 + 56.(2x)^3.1^5 + 28.(2x)^2.1^6 + 8.(2x)^1.1^7 + 1.(2x)^0.1^8 =$
$= 256x^8 + 8.128x^7 + 28.64x^6 + 56.32x^5 + 70.16x^4 + 56.8x^3 + 28.4x^2 + 8.2x + 1 =$
$= 256x^8 + 1\,024x^7 + 1\,792x^6 + 1\,792x^5 + 1\,120x^4 + 448x^3 + 112x^2 + 16x + 1$

M. Ha hasonlóan járunk el egy páratlan hatványnál, a zárójel előtt megjelenik a -1 szám. Ez azt jelenti, hogy a binomiális kifejtés minden tagja negatív előjelű lesz.

az együtthatók: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$\left(3x - \frac{4}{3}\right)^7 = 1.(3x)^7.\left(-\frac{4}{3}\right)^0 + 7.(3x)^6.\left(-\frac{4}{3}\right)^1 + 21.(3x)^5.\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 35.(3x)^4.\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 35.(3x)^3.\left(-\frac{4}{3}\right)^4 +$
$+ 21.(3x)^2.\left(-\frac{4}{3}\right)^5 + 7.(3x)^1.\left(-\frac{4}{3}\right)^6 + 1.(3x)^0.\left(-\frac{4}{3}\right)^7 = 2\,187x^7 + 7.729x^6.\left(-\frac{4}{3}\right) + 21.243x^5.\frac{16}{9} +$
$+ 35.81x^4.\left(-\frac{64}{27}\right) + 35.27x^3.\frac{256}{81} + 21.9x^2.\left(-\frac{1024}{243}\right) + 7.3x.\frac{4096}{729} - \frac{16384}{2187} =$
$= 2\,187x^7 – 6\,804x^6 + 9\,072x^5 – 6\,720x^4 + \frac{8960}{3}x^3 - \frac{7168}{9}x^2 + \frac{28672}{243}x - \frac{16384}{2187}$

az együtthatók: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4x}\right)^6 = 1.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^6.\left(\frac{9}{4x}\right)^0 + 6.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^5.\left(\frac{9}{4x}\right)^1 + 15.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^4.\left(\frac{9}{4x}\right)^2 + 20.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^3.\left(\frac{9}{4x}\right)^3 +$
$+ 15.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2.\left(\frac{9}{4x}\right)^4 + 6.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^1.\left(\frac{9}{4x}\right)^5 + 1.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^0.\left(\frac{9}{4x}\right)^6 = \frac{64x^{12}}{729} + 6.\frac{32x^{10}}{243}.\frac{9}{4x} + 15.\frac{16x^8}{81}.\frac{81}{16x^2} +$
$+ 20.\frac{8x^8}{27}.\frac{729}{64x^3} + 15.\frac{4x^4}{9}.\frac{6561}{256x^4} + 6.\frac{2x^2}{3}.\frac{59049}{1024x^5} + \frac{531441}{4096x^6} =$
$= \frac{64x^{12}}{729} + \frac{16x^9}{9} + 15x^6 + \frac{135x^3}{2} + \frac{10935}{64} + \frac{59049}{256x^3} + \frac{531441}{4096x^6}$

Határozzuk meg a $(4x^3 – 3)^{11}$ kifejtésének nyolcadik tagját.

$a_8 = \binom{11}{8-1}(4x^3)^{11-8+1}.(-3)^{8-1} = \binom{11}{7}(4x^3)^4.(-3)^7 = 330.256x^{12}.(-2\,187) = -184\,757\,760x^{12}$

A $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4x}\right)^{12}$ kifejezés kifejtésében hányadik tag nem tartalmaz x-et?

$a_k = \binom{12}{k-1}.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^{13-k}.\left(\frac{9}{4x}\right)^{k-1} = \binom{12}{k-1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{13-k}.\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1}(x^2)^{13-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} =$

az első három tényező csak szám – csak az utolsó kettő az x hatványa

$= K.\frac{(x^2)^{13-k}}{x^{k-1}}$

ez az x hatványainak szorzata (hányadosa) eggyel kell legyen egyenlő

$1 = \frac{(x^2)^{13-k}}{x^{k-1}} \qquad /.x^{k-1}$
$x^{k-1} = (x^2)^{13-k}$
$x^{k-1} = x^{26-2k}$

$k - 1 = 26 - 2k \qquad /+2k + 1$

$3k = 27 \qquad /:3$

$k = 9$

A $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^{15}$ kifejezés kifejtésének hányadik tagja tartalmazza az x^{-3}-t?

$a_k = \binom{15}{k-1}.\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}.\left(-\frac{2}{x}\right)^{k-1} = \binom{15}{k-1}.(-2)^{k-1}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} =$

az első két tényező csak szám – az utolsó kettő az x hatványa

$= K.\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}}{x^{k-1}}$

$x^{-3} = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}}{x^{k-1}} \qquad /.x^{k-1}$

$x^{-3}.x^{k-1} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}$

$x^{k-4} = x^{\frac{16-k}{3}}$

$k - 4 = \frac{16-k}{3} \qquad /.3$

$3k - 12 = 16 - k \qquad /+k + 12$

$4k = 28 \qquad /:4$

$k = 7$

Az x mely értéke mellet lesz a $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2x}\right)^9$ kifejezés kifejtésének negyedik tagja 3?

$a_4 = \binom{9}{3}.\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^6.\left(\frac{1}{2x}\right)^3 = 84.x^4.\frac{1}{8x^3} = \frac{21x}{2}$

$3 = \frac{21x}{2} \qquad /.\frac{2}{21}$

$\frac{2}{7} = x$